A_∞ algebra and Floer cohomology for Lagrangian intersections

太田　啓史
名古屋大学大学院多元数理科学研究科

§0 シンプレクティック幾何におけるFloer cohomology.

以下のような話をさせて頂きました。また、以下は記述の簡明のため設定等は概略で正確なものではなく、また定理の主張も解析的技術的な仮定に関する記述は一切省略されているという意味で不正確であることをお断りしておきます。あくまで話の粗筋とアイデアを書いたものと理解して下さい。詳しく正確な内容については、[FOOO]及び、そのサーベイである [O]などを御覧下さい。

(M,ω)を実$2n$次元シンプレクティク多様体とし、LをMの中の向き付けられた滑らかなラグランジアン部分多様体とする。簡単のため、今ラグランジアン部分多様体は一つの場合を考える[1]。$\phi:(M,\omega)\to(M,\omega)$ をハミルトン微分同相写像[2]とする。２つのラグランジアンLと$\phi(L)$の交叉に関してラグランジアン交叉のFloer cohomologyというものを考えたい。簡単のためLと$\phi(L)$は横断的に交わっているとする[3]。コチェインの加群としては、交点が生成する加群を考え（基礎環については後で述べる)、次数はマスロフ指数と呼ばれるもので与えられる。微分作用素δは通常のモース理論の時のように、指数の差が１である２つの交点p,qに対し、$\delta(p)=\sum_q \#\mathcal{M}(p,q)\cdot q$で（とりあえず）定義する。ここで、$\mathcal{M}(p,q)=\widetilde{\mathcal{M}}(p,q)/\mathbf{R}$ で $\widetilde{\mathcal{M}}(p,q)$は次を満たす$u$の集合である：

・$u:D^2\to M$ はJ-holomorphic map[4]
・$u(\partial_+)\subset L, u(\partial_-)\subset\phi(L)$
・$u(-1)=p, u(+1)=q$

---

[1]沢山のラグランジアンを考える時は、以下の話をA_∞カテゴリーで定式化してやる。おおむね基本的なことは以下の話と同様の議論でできる。

[2]ある時間依存したハミルトン関数$H_t:M\to\mathbf{R}$が存在し、H_tの定めるハミルトンベクトル場X_{H_t}の生成する流れをΦ_t とした時、$\Phi_0=id,\Phi_1=\phi$となるものが存在する。これはシンプレクティック構造を保ち、ハミルトン微分同相群のリー環はM上の完全1形式全体と同一視される。

[3]交叉が次元をもってもそれらが非退化な部分多様体であれば十分である。

[4]通常のモース理論における勾配流の方程式がこの場合非線形コーシー・リーマン方程式となっている。

ここで$\partial_+(\partial_-)$は複素平面内の単位円板D^2の上（下）半分の境界の弧をそれぞれ表わす。この集合には$\mathrm{Aut}(D^2)\cong PSL_2(\mathbf{R})$のうち、2点$\pm1$を固定する群$\mathbf{R}$が自由に作用している。

しかし、問題は、このようにδを定義してしまうと、一般には$\delta^2\neq 0$となってしまうことである[5]。これは、上記の非線形コーシー・リーマン方程式の解にバブル、特に擬正則円板の境界でバブルする擬正則円板が現れ、実余次元が1の境界成分としてモジュライのコンパクト化に現れるためである。[6] ここでは、

(0) その障害、及び

(1) 非障害の場合に境界作用素を変形して$\delta'^2=0$とできること、

(2) 得られたコホモロジーは、δの変形の仕方に依存するが、その依存の記述

についてA_∞代数を用いて記述する。最後に、これらの幾何学的実現についても少し触れる[7]。

§1 B-model in Mirror Symmetry.

まず、ミラー対称性予想の下で、我々が展開すること(A-model, symmplectic side)に対応する B-model (complex side)の方を説明する。$\check{M}$をn次元複素多様体とし、$E\to\check{M}$を階数rの複素ベクトル束とする。Eにエルミート計量を入れ、E上の正則構造とエルミート接続Aで$\overline{\partial}_A\circ\overline{\partial}_A=0$なるものとを同一視することにより、今$\overline{\partial}_{A_0}$により$E$に正則構造が一つ与えられているとする。

1.1) Dolbeault D.G.A.

積 $\circ:\Omega^{p_1,q_1}(\mathrm{End}E)\times\Omega^{p_2,q_2}(\mathrm{End}E)\to\Omega^{p_1+p_2,q_1+q_2}(\mathrm{End}E)$ が、ウェッジ積とEndの合成により定義される。階数$r\geq 2$なら非可換な積である。更に、$\overline{\partial}_{A_0}:\Omega^0(E)\to\Omega^{0,1}(E)$を自然に$\overline{\partial}_{A_0}:\Omega^{p,q}(E)\to\Omega^{p,q+1}(E)$に拡張し、これは$\overline{\partial}_{A_0}:\Omega^{p,q}(\mathrm{End}E)\to\Omega^{p,q+1}(\mathrm{End}E)$を引き起す。同じ記号で書く。$\overline{\partial}_{A_0}\circ\overline{\partial}_{A_0}=0$より、特にDolbeault D.G.A.（次数付き微分代数）$(\Omega^{0,\bullet}(\mathrm{End}E),\overline{\partial}_{A_0},\circ)$が得られる。

1.2) Deformation theory I–Maurer-Cartan 方程式.

E上の正則構造$\overline{\partial}_{A_0}$を$\overline{\partial}_{A_1}$に変形することを考える。2つの接続の差は0階の作用素であるから、$B:=\overline{\partial}_{A_1}-\overline{\partial}_{A_0}\in\Omega^{0,1}(\mathrm{End}E)$である。$\overline{\partial}_{A_1}\circ\overline{\partial}_{A_1}=0$を書き換えると$B$は

$$\overline{\partial}_{A_0}B+B\circ B=0$$

[5]Floerはもともと$\pi_2(M,L)=0$の時に上記アイデアによりコホモロジーを構成した。この時は非自明擬正則円板は初めから存在しないので、バブルも当然おこらない。

[6]周期的ハミルトン系に関するFloer cohomologyというものがあり、これはϕの不動点に基づいて定義されるFloer cohomologyであるが、こちらの方はδの定義の際用いられるのは境界のない$\mathbf{C}P^1$からの擬正則写像のモジュライであり、このときは擬正則円板のバブル現象はなく、Kontsevichによるstable map comactification の考え方と深谷–小野による倉西構造の概念を用いることで Floer cohomologyはいつでも定義される。

[7]我々の理解の時間的経緯とは逆さまの議論展開ではあるが。

なる非線形（$r \geq 2$の時）微分方程式を満たさなければならないことがわかる。これを、(Dolbeault D.G.A. $(\Omega^{0,\bullet}(\mathrm{End}E), \overline{\partial}_{A_0}, \circ)$ に対する）Maurer-Cartan方程式という。逆に上のMaurer-Cartan方程式の解Bに対し $\overline{\partial}_{A_0} + B$は$E$に新たな正則構造を定めるので、Maurer-Cartan 方程式の解集合$\widehat{\mathcal{MC}}_E$が正則構造 $\overline{\partial}_{A_0}$のまわりでの変形を与える。

1.3) Deformation theory II–Gauge equivalence and infinitesimal deformation.

2つのMaurer-Cartan方程式の解B_1, B_2 に対し、それらが定める正則構造$\overline{\partial}_{A_0} + B_1$と$\overline{\partial}_{A_0} + B_2$が「同じ」正則構造を定めることがある。ここで、「同じ」とは、ある$\varphi \in \mathrm{Aut}(E)$があって、

$$\varphi \circ (\overline{\partial}_{A_0} + B_1) = (\overline{\partial}_{A_0} + B_2) \circ \varphi$$

なるときをいい、φをEのゲージ変換という。$\widehat{\mathcal{MC}}_E$をゲージ同値関係$\sim$で割った空間$\mathcal{MC}_E := \widehat{\mathcal{MC}}_E / \sim$が変形空間となる。

変形空間$\mathcal{MC}_E$の$\overline{\partial}_{A_0}$における無限小変形を考える。Maurer-Cartan方程式の線形化方程式は$\overline{\partial}_{A_0} B = 0$である。一方、無限小ゲージ変換は、上のゲージ変換の式を微分したものを考えればよく、それは$\varphi = 1 + \epsilon\varphi_1$, $\varphi_1 \in \Omega^0(\mathrm{End}E)$ と書いた時、($\Omega^0(\mathrm{End}E)$はゲージ群のリー環) $B_1 - B_2 = \overline{\partial}_{A_0}\varphi_1$となる。従って変形空間$\mathcal{MC}_E$の$\overline{\partial}_{A_0}$における無限小変形は$H^1_{\overline{\partial}_{A_0}}(\check{M}, \mathrm{End}E)$で記述される。

以上は古典的な話であり、ある意味ここにでてきた「もの」は既に確立されたものである。変形の局所的な描像はそれに附随するD.G.A.のホモトピー類で決まる、という Goldman-Millsonの考え方を注意しておく。

§2 A-model in Mirror Symmetry.

§1に対応するシンプレクティック幾何学サイドの話しを展開する。B-modelの時とは異なり、まず対応する「もの」概念からして作って行かねばならない。更に、ミラー対称性予想のいうところによれば、A-modelでは、量子補正とよばれる非線形効果が組み込まれていなければならない。D.G.A.ではなく、より広いA_∞代数（ホモトピー結合代数）を用いて理論を展開する。A_∞代数はA-modelにおいては、擬正則円板のバブルの状況を記述する代数構造として自然に現れる[8]。

ミラー対称性予想の辞書に従えば、複素多様体$\check{M}$に対してシンプレクティック多様体M ($\dim_{\mathbf{R}} M = 2n$)が定まり、正則ベクトル束$E \to \check{M}$に対して Mのシンプレクティック部分多様体L[9] が対応する。が、しかし、ミラー対称性予想はとりあえずおい

[8]境界のないリーマン面からの擬正則写像を用いた量子コホモロジー環などは、結合的であった。これは理論がコホモロジーレベルで定式化可能であったことが一つの要因である。しかし、擬正則円板を考えた場合、円板のバブルという新たな現象のため一般には理論はコホモロジーレベルで定式化不可能であり、コチェインレベルでの議論が不可欠となる。代数構造も結合的まで求めることはできない。

[9]詳しくは L上の$U(1)$平坦束も組にして考える必要があるが省略する。

ておいて、我々はここからスタートする。即ち(コンパクト) シンプレクティック多様体Mとその (コンパクト) ラグランジアン部分多様体 L[10]があったとする。

2.1) ラグランジアン部分多様体に附随するA_∞代数の構成

まず、議論の基礎環として我々は次のような普遍ノビコフ環 $\Lambda_{0,nov}$[11] を導入した。

定義 2.1. ([FOOO]). T, e を不定元とする。$a_i \in \mathbf{Q}$, $\lambda_i \in \mathbf{R}_{\geq 0}$, $(\lim_{i\to\infty} \lambda_i = +\infty)$, $n_i \in \mathbf{Z}$とし、

$$\Lambda_{0,nov} = \left\{ \sum_i a_i T^{\lambda_i} e^{n_i} \mid \lambda_i \geq 0, \text{ and } n_i = 0 \text{ if } \lambda_i = 0 \right\}$$

とおく。$\deg T^\lambda e^n = 2n$ により次数を与え、$F^\lambda \Lambda_{0,nov} = \{\sum_i a_i T^{\lambda_i} e^{n_i} \mid \lambda_i \geq \lambda\}$ によりフィルトレーションが入りこれはフィルター付き次数付き可換環になる。幾何学的にはλ_i はシンプレクティック面積 (エネルギー) $\omega(\beta)$ $(\beta \in \pi_2(M, L))$ を表わし、シンプレクティックエネルギーによりフィルトレイションを入れ、n_i はマスロフ指数に対応する。$\Lambda_{0,nov}$ は局所環であり、

$$\Lambda_{0,nov}^+ = \{\sum a_i T^{\lambda_i} e^{n_i} \in \Lambda_{0,nov} \mid \lambda_i > 0\}$$

を極大イデアルとしてもつ。明らかに$\Lambda_{0,nov}/\Lambda_{0,nov}^+ \cong \mathbf{Q}$。このように係数環を$\mathbf{Q}$に還元するとフィルトレーションはなくなり、これは後で、擬正則写像の効果を考えない (定値写像のみを考える) 古典的描像に対応する。

$C^k(L; \mathbf{Q})$をL上の整kカレントで滑らかな特異チェインで実現されるもので生成される自由$\mathbf{Q}$加群とする。[12] $C^\bullet(L; \Lambda_{0,nov})$を $C^\bullet(L; \mathbf{Q}) \otimes \Lambda_{0,nov}$ (の適当な) 完備化とする。次数は$C^\bullet(L; \mathbf{Q})$の次数と係数環からの次数の和で与えられる。

次数 1 の写像の無限列 $\mathbf{m}_k, (k = 0, 1, 2, \cdots)$

$$\mathbf{m}_k : B_k(C[1](L; \Lambda_{0,nov})) \to C[1](L; \Lambda_{0,nov})$$

で、A_∞関係式 (後述) を満たすものを以下で構成しよう。ここで、

$$B_k(C[1]) = \bigoplus_{n_1, \cdots, n_k} (C[1])^{n_1} \otimes \cdots \otimes (C[1])^{n_k}.$$

---

[10]一般にラグランジアン部分多様体の存在をいうことは難しい。

[11]もともとFloer理論は、道の空間のある被覆空間上のモース理論であり、ノビコフ環はその被覆変換群の群環として表れた。しかし、ミラーの観点からこのノビコフ環の新たな意味が認識されつつある。これは連続付値環の構造をもつ。丁度λ_iが無限大に発散するところがシンプレクティック面積が爆発するところで、これはミラーにいけば複素構造が最も退化したところに対応する。

[12]正確にはその適当な可算部分複体をとる必要がある。これは横断正則性議論においてベールのカテゴリー定理を頻繁に用いるためであるが、省略する。

そのために、擬正則円板のモジュライ空間（の安定写像によるコンパクト化）を導入する。基本的なアイデアは全ての擬正則円板の効果を組み込み、モジュライの境界を解析することによりA_∞代数構造を見い出すことである。

定義 2.2. $\beta \in \pi_2(M, L)$に対し、$\mathcal{M}_{k+1}(L, \beta)$を組$(w; z_0, \cdots, z_k)$の同型類の集合とする。ここで、$w : (D^2, \partial D^2) \to (M, L)$ は種数0の安定J写像[13]でそのホモトピー類がβであるもの、$z_i \in \partial D^2$はmarked pointsとする。更に$\mathcal{M}_{k+1}^{\mathrm{main}}(L, \beta)$ を、marked pointsの順序がサイクリックであるものに対応する連結成分とする。自然な写像

$$ev_j : \mathcal{M}_{k+1}(L, \beta) \longrightarrow L, \qquad (w; z_1, \cdots, z_k) \mapsto w(z_j)$$

がある。

さて、$C^*(L; \mathbf{Q})$の元の特異チェインとしての表示を $(P_i, f_i) \in C^*(L; \mathbf{Q})$, $i = 1, \cdots, k$, とする。このとき、次のファイバー積を

$$\mathcal{M}_1^{\mathrm{main}}(\beta; P_1, \cdots, P_k) := \pm \mathcal{M}_{k+1}^{\mathrm{main}}(L; \beta)_{(ev_1, \cdots, ev_k)} \times_{f_1 \times \cdots \times f_k} (P_1 \times \cdots \times P_k)$$

を考える[14]。

$\beta_0 = 0 \in \pi_2(M, L)$とおく。

定義 2.3. (1) $(P, f) \in C^k(L, \mathbf{Q})$に対し、

$$\mathbf{m}_{0,\beta}(1) = \begin{cases} (\mathcal{M}_1(L; \beta), ev_0) & \text{for } \beta \neq \beta_0 \\ 0 & \text{for } \beta = \beta_0, \end{cases}$$

$$\mathbf{m}_{1,\beta}(P, f) = \begin{cases} (\mathcal{M}_1^{\mathrm{main}}(\beta; P), ev_0) & \text{for } \beta \neq \beta_0 \\ (-1)^n \partial P & \text{for } \beta = \beta_0, \end{cases}$$

とおく。ここで、∂は普通の境界作用素で、最後のev_0によりLのチェインへもっていったものを$(\quad, ev_0)$と表わした。

(2) 各$k \geq 2$と$(P_i, f_i) \in C^{g_i}(L, \mathbf{Q})$に対し、

$$\begin{aligned} \mathbf{m}_{k,\beta}((P_1, f_1), \ldots, (P_k, f_k)) &= \mathbf{m}_{k,\beta}((P_1, f_1) \otimes \cdots \otimes (P_k, f_k)) \\ &= (\mathcal{M}_1^{\mathrm{main}}(\beta; P_1, \cdots, P_k), ev_0). \end{aligned}$$

[13] J写像のモジュライのコンパクト化の際にKontsevichにより導入された。自己同型が有限群であるもの。

[14] 向きの問題は重要であるがここでは一切省略する。詳しくは[FOOO]をみよ。また、これは普通の意味では横断正則性が成り立たないのでファイバー積はとれないが、安定写像の空間に倉西構造がはいることがわかり、倉西構造の意味でのファイバー積をとっている（詳細略）。

(3) このとき、$\mathbf{m}_k$ $(k \geq 0)$ は

$$\mathbf{m}_k = \sum_{\beta \in \pi_2(M,L)} \mathbf{m}_{k,\beta} \otimes [\beta] = \sum_{\beta \in \pi_2(M,L)} \mathbf{m}_{k,\beta} \otimes T^{\omega(\beta)} e^{\frac{\mu(\beta)}{2}}$$

により定義する。

このとき次が成り立つ。

定理 2.4. ([FOOO]) Lを相対スピン[15] なLagrangian部分多様体とする。このとき、$(C(L;\Lambda_{0,nov}),\mathbf{m})$は（フィルター付き）$A_\infty$代数となる。即ち各$k$に対し、以下の関係式($A_\infty$関係式)

$$\sum_{k_1+k_2=k+1} \sum_i (-1)^{\deg x_1+\cdots+\deg x_{i-1}+i-1} \mathbf{m}_{k_1}(x_1,\cdots,\mathbf{m}_{k_2}(x_i,\cdots,x_{i+k_2-1}),\cdots,x_k) = 0$$

が成り立つ[16]。

古典描像にいくために、係数環を$\Lambda_{0,nov}/\Lambda_{0,nov}^+ \cong \mathbf{Q}$ により、$\mathbf{Q}$に還元したものを$\overline{\mathbf{m}}_k$などと書くと、これは$\overline{\mathbf{m}}_0 = 0$を満たす。このとき、次が成り立つ。

定理 2.5. ([FOOO]) $(C(L;\mathbf{Q}),\overline{\mathbf{m}})$ はLの有理ドラームD.G.A.とホモトピー同値。

Sullivan及び、Quillenによる有理ホモトピー論によれば、有理ドラームD.G.A.のホモトピー型が Lの有理ホモトピー型を決める[17]。この意味で、我々のA_∞代数は、古典的なLの有理ホモトピー型をD.G.A.ではなく、A_∞代数としての変形を与え、かつ更に、それを擬正則円板の効果（ディスクインスタントン効果）により量子変形されたもの、と解釈される。

2.2) Deformation theory I–Maurer-Cartan方程式.

定義 2.6. $b \in C[1]^0(L,\Lambda_{0,nov})$ に対し[18]、$\mathbf{m}_k$を以下のように変形する。

$$\begin{aligned}\mathbf{m}_k^b(x_1,\cdots,x_k) &= \sum_{\ell_0,\cdots,\ell_k} \mathbf{m}_{k+\sum\ell_i}(\underbrace{b,\cdots,b}_{\ell_0},x_1,\underbrace{b,\cdots,b}_{\ell_1},\cdots,\underbrace{b,\cdots,b}_{\ell_{k-1}},x_k,\underbrace{b,\cdots,b}_{\ell_k}) \\ &= \mathbf{m}(e^b x_1 e^b x_2 \cdots x_{k-1} e^b x_k e^b).\end{aligned}$$

ここで、$e^b = 1 + b + b \otimes b + \cdots$。

[15] $w_2(TL) \in \mathrm{Image} H^2(M;\mathbf{Z}_2) \to H^2(L;\mathbf{Z}_2)$であるときをいう。これはラグランジアン境界条件をもつ擬正則写像のモジュライ空間が向き付け可能であるための条件である。§4 (2)も参照。

[16] A_∞代数の中で特に$\mathbf{m}_0 = 0$ かつ、高次の積が全て消えている$\mathbf{m}_k = 0$ $(k \geq 3)$ものが DGAに他ならない。$\mathbf{m}_0 \neq 0$ならば $\mathbf{m}_1\mathbf{m}_1 \neq 0$であり、$\mathbf{m}_0$ が$\mathbf{m}_1\mathbf{m}_1 = 0$の障害となっている。

[17] 正確には Lは単連結あるいはべき零である必要がある。

[18] 正確には$b \equiv 0 \pmod{\Lambda_{0,nov}^+}$なる$b$。定義 2.8.においても同様。

補題 2.7. $(C, \mathbf{m})$がA_∞代数ならば、任意の$b \in C[1]^0(L, \Lambda_{0,nov})$に対し$(C, \mathbf{m}^b)$も$A_\infty$代数。

このようにA_∞構造を変形した時、一般には$\mathbf{m}_0^b \neq 0$ である。我々は、コホモロジーを定義したいので、$\mathbf{m}_0^b = 0$ なるように変形したい。この時、$\mathbf{m}_1^b \mathbf{m}_1^b = 0$ となる。そのような変形を与えるbの満たすべき条件が、次の A_∞版Maurer-Cartan 方程式に他ならない。

定義 2.8. $b \in C[1]^0(L, \Lambda_{0,nov})$ に対し

$$\mathbf{m}_0(1) + \mathbf{m}_1(b) + \mathbf{m}_2(b, b) + \cdots = 0$$

をA_∞版Maurer-Cartan 方程式という。簡単に$\mathbf{m}(e^b) = 0$と書く。Maurer-Cartan方程式の解の集合を $\widehat{\mathcal{MC}}_L$ と書く。

補題 2.9. $b \in \widehat{\mathcal{MC}}_L$と$\mathbf{m}_0^b = 0$ は同値。

従って$\widehat{\mathcal{MC}}_L \neq \emptyset$ならば、コホモロジー $H(C(L, \Lambda_{0,nov}), \mathbf{m}_1^b)$が定義される。これが、$L$のFloerコホモロジー

$$HF(L, \Lambda_{0,nov}; b)$$

である。境界作用素はMaurer-Cartan 方程式の解bによって変形されている。

2.3) Deformation theory II–Gauge equivalence and infinitesimal deformation.

2つのMaurer-Cartan 方程式の解b_0, b_1により変形して得られた2つのコホモロジーはいつ同型かを問う。Maurer-Cartan 方程式の解の集合$\widehat{\mathcal{MC}}_L$に「ゲージ同値」関係を導入したい。そのために、A_∞代数の族を考える。今、$(C, \mathbf{m})$を $\Lambda_{0,nov}$上のA_∞代数とする。$(\mathrm{Poly}([0,1], C), \widetilde{\mathbf{m}})$を以下で定義する。

$$\begin{aligned} & \mathrm{Poly}([0,1], C)^{k+1} = \mathrm{Poly}([0,1], C[1])^k \\ = \quad & \{(x(s), y(s)) \mid x(s) = \sum_i x_i(s) T^{\lambda_i}, \quad y(s) = \sum_i y_i(s) T^{\lambda_i}, \quad (\lambda_i \to \infty)\} \end{aligned}$$

ここで、$x_i : [0,1] \to C[1]^k, y_i : [0,1] \to C[1]^{k-1}$ でおのおのsについて多項式であるものを考えている[19]。これより、後で$s = 0, 1$に値を代入することが可能となる。また、

$$\begin{aligned} & \widetilde{\mathbf{m}}_1\Big((x(s), y(s))\Big) := (\mathbf{m}_1(x(s)), \frac{dx(s)}{ds} - \mathbf{m}_1(y(s)), \\ & \widetilde{\mathbf{m}}_k\Big((x^1(s), y^1(s)), \cdots, (x^k(s), y^k(s))\Big) \\ := \quad & \Big(\mathbf{m}_k(x^1(s), \cdots, x^k(s)), \sum_i \pm \mathbf{m}_k(x^1(s), \cdots, x^{i-1}(s), y^i(s), x^{i+1}(s), \cdots x^k(s))\Big) \end{aligned}$$

[19] sについて整理し直した時 $x(s) = \sum_{k=0}^\infty x_k(T) s^k$で$s$の次数は有限とは限らないことに注意せよ。各$\lambda_i$（これはシンプレクティック面積に対応する）を決めればそれより面積が小さい擬正則円板はホモトピー類を固定したとき、有限個である（グロモフのコンパクト性定理)。

と定義する。この時、

命題 2.10. $(\mathrm{Poly}([0,1],C[1]),\widetilde{\mathbf{m}})$は$A_\infty$代数。

このA$_\infty$代数に対するMaurer-Cartan方程式の解の集合を $\widehat{\mathcal{MC}}((\mathrm{Poly}([0,1],C[1]),\widetilde{\mathbf{m}}))$と書く。

$$\begin{aligned}\mathrm{Eval}_0 &: \mathrm{Poly}([0,1],C[1]) \to C[1], \qquad (x(s),y(s)) \mapsto x(0)\\ \mathrm{Eval}_1 &: \mathrm{Poly}([0,1],C[1]) \to C[1], \qquad (x(s),y(s)) \mapsto x(1)\end{aligned}$$

はともにA_∞ homomorphismを定める。

定義 2.11. $b_0,b_1 \in \widehat{\mathcal{MC}}_L$がゲージ同値であるとは、ある$\widetilde{b} \in \widehat{\mathcal{MC}}((\mathrm{Poly}([0,1],C[1]),\widetilde{\mathbf{m}}))$が存在し、$\mathrm{Eval}_0(\widetilde{b}) = b_0$かつ $\mathrm{Eval}_1(\widetilde{b}) = b_1$ が成り立つことをいう。この時、$b_0 \sim b_1$と書く。

命題 2.12. $\sim$は$\widehat{\mathcal{MC}}_L$に同値関係を定める。

定理 2.13. 2つのMaurer-Cartan方程式の解b_0,b_1がゲージ同値ならば、b_0,b_1で変形された $(C(L;\Lambda_{0,nov}),\mathbf{m}^{b_0})$と $(C(L;\Lambda_{0,nov}),\mathbf{m}^{b_1})$は A_∞代数としてホモトピー同値[20]。従って、特に、それぞれの$\mathbf{m}_1^{b_0}$及び $\mathbf{m}_1^{b_1}$ コホモロジーは同型: $H(C(L;\Lambda_{0,nov}),\mathbf{m}_1^{b_0}) \cong H(C(L;\Lambda_{0,nov}),\mathbf{m}_1^{b_1})$.

これより、$\mathcal{MC}_L := \widehat{\mathcal{MC}}_L/\sim$とおけば、これが変形空間を与える。

これの$b \in \mathcal{MC}_L$の近くでの無限小変形を考えると、その接空間はbで変形されたFloerコホモロジー $HF(L,\Lambda_{0,nov};b)$で与えられる。詳しくは省略するが、小平-Spencer写像に対応する写像

$$\mathcal{MC}_L \to HF^0(L,\Lambda_{0,nov};b) = H^0(C(L;\Lambda_{0,nov}),\mathbf{m}_1^b)$$

も得られる。ここで、次数を1シフトしてあったので、通常のコホモロジーの次数では1である。一方、係数$\Lambda_{0,nov}$にもマスロフ指数によって次数が与えられていたが、それを思い出せば、Lの幾何学的なコチェインとしては、あらゆる奇数次のもの[21]が組み込まれていることに注意されたい。(いわゆる「拡大モジュライ」と呼ばれるもの。)

更に倉西写像

$$HF^{odd}(L) \to HF^{even}(L)$$

も定義されるが、省略する。(ここでは、やっぱり気分が出ないので、シフト前の次数で書いた)。

§3 障害類とMaurer-Cartan解の幾何学的実現.

---

[20]定義は省略する。

[21]古典的なラグランジアン部分多様体の局所変形は$H^1(L;\mathbf{R})$で与えられる。

ここでは、§0で触れたFloerコホモロジーが定義できるための障害をより幾何学的に考察し、前節でのMaurer-Cartan方程式が解をもつための幾何学的条件を与え、解を幾何学的に実現する。前節によれば、Floerコホモロジーを定義するための障害はラグランジアン部分多様体Lから構成されたA_∞代数 $(C(L;\Lambda_{0,nov}),\mathbf{m})$における $\mathbf{m}_0$の存在であり。それを消す変形を与えるのがMaurer-Cartan方程式の解であった。以下では、障害類と呼ばれるLのあるコホモロジー類の系列$\{o_k(L)\}$を構成し、障害類が全て消滅することが、Maurer-Cartan方程式の解の存在のための十分条件を与えることを示す。障害類の構成の基本的なアイデアは起こりうる擬正則円板のバブルをすべて考え、その境界値を考えることである。以下の議論で基本的な2つの群準同型を導入する。

$$\mathcal{A}:\pi_2(M,L)\to\mathbf{R},\quad \mu:\pi_2(M,L)\to\mathbf{Z}.$$

ここで、$\mathcal{A}(\beta)=\omega(\beta)$ $(\beta\in\pi_2(M,L))$ はシンプレクティック面積で、μはMaslov指数と呼ばれるものである。障害類はシンプレクティック面積の小さいものから帰納的に構成される。

グロモフのコンパクト性定理により、シンプレクティック面積の大きさにより、$\pi_2(M,L)$の元で擬正則円板で実現される類に半順序が入る:

$$0=\mathcal{A}(\beta_0=0)<\mathcal{A}(\beta_1)\le\mathcal{A}(\beta_2)\le\cdots.$$

第一障害類$o_1(L)$を定義しよう。最小面積の擬正則円板のモジュライ空間 $\mathcal{M}_1(L;\beta_1)$ を考える[22]。これは最小面積ゆえ、もはやバブルはおこらない。従って $\partial\mathcal{M}_1(L;\beta_1)=\emptyset$ である。故に $ev_0(\mathcal{M}_1(L;\beta_1))$は$L$のサイクルを定める。これの定める（コ）ホモロジー類を

$$o_1(L)=[ev_0(\mathcal{M}_1(L;\beta_1))].$$

と定義する。次に高次の障害類をシンプレクティック面積に関して帰納的に構成する。即ち、今$o_j(L)=0\in H_*(L;\mathbf{Q})$ $(j=1,\cdots,k-1)$であったと仮定する。この時$\partial\mathcal{B}_j(L)=(-1)^{n+1}o_j(L)$. なるような$L$のチェイン $\mathcal{B}_j=\mathcal{B}_j(L)\subset L$ を勝手にとる。$i_1,\cdots,i_m<k$に対し、次のファイバー積

$$\mathcal{M}_1^{\mathrm{main}}(\beta_k;\mathcal{B}_{i_1},\cdots,\mathcal{B}_{i_m}):=\pm\mathcal{M}_{m+1}^{\mathrm{main}}(\beta_k-\sum_{j=1}^m\beta_{i_j})_{(ev_1,\cdots,ev_m)}\times(\mathcal{B}_{i_1}\times\cdots\times\mathcal{B}_{i_m})$$

を考える。

定義 3.1.

$$o_k(L)=\sum_{\substack{m=0,1,2,\ldots\\ i_1,\ldots,i_m<k\\ \beta_k-\sum_{j=1}^m\beta_{i_j}\in G_+(L)}}(ev_0(\mathcal{M}_1^{\mathrm{main}}(\beta_k;\mathcal{B}_{i_1},\ldots,\mathcal{B}_{i_m})),$$

[22]面積がゼロに収束していくような擬正則円板の無限列は存在せず、最小面積は存在する。これもグロモフのコンパクト性定理の帰結である。

ここで、$G_+(L)$は $\pi_2(M,L)$の元で擬正則円板で実現されるホモトピー類の正係数線形結合の集合をあらわす。右辺は有限和である。

これより、$o_k(L)$はLの$\mathbf{Q}$チェインを定めるが、実は次が示せる。

命題 3.2. $\partial o_k(L)=0.$

これは、$o_k(L)$の境界として、円板がバブルするタイプのものと$\mathcal{B}_*$が境界に行くタイプのものの2種類が表れるが、それらがちょうど向きもこめてキャンセルすることを証明することにより示される。命題3.2により、$o_k(L)$はLのあるホモロジー類を定める。これが求める障害類である。

障害類について基本的な事柄をまとめておく。

定理 3.3. (1) $o_k(L)\in H_{n+\mu(\beta_k)-2}(L;\mathbf{Q})\cong H^{2-\mu(\beta_k)}(L;\mathbf{Q})$。但し、$n=\dim L$。
(2) より詳しく $o_k(L)\in \mathrm{Ker}(H_{n+\mu(\beta_k)-2}(L;\mathbf{Q})\to H_{n+\mu(\beta_k)-2}(M;\mathbf{Q}))$
(3) 全ての$o_k(L)=0$のとき、$o_k(L)$をバウンドするチェイン $\mathcal{B}_k$を用いて境界作用素を変形することにより、Floerコホモロジー$HF(L)$が定義される。

特に $H_*(L;\mathbf{Q})\to H_*(M;\mathbf{Q})$が単射ならば、障害類は消える。また、$\mu(\beta)\geq 3$ならば、自動的に消える。これはかつて Y-G Oh氏が構成した状況である。

前節の話との関係は以下の通りである。$o_k(L)=0$とし、バウンドするチェイン$\mathcal{B}_k$をとる。この時、

$$b:=\sum_k \mathcal{B}_k\otimes T^{\omega(\beta_k)}e^{\frac{\mu(\beta_k)}{2}}$$

とおくと、次元の計算により、これは$C[1]^0(L,\Lambda_{0,nov})$の元を定めることがわかる。更に、

定理 3.4. bはMaurer-Cartan方程式の解である。

従って、障害類の消滅がMaurer-Cartan方程式の解の存在を意味し、障害類をバウンドするチェインの取り方を一つ選べば解が得られる。できあがったFloerコホモロジーがバンドするチェイン$\mathcal{B}_*$の取り方にどう依存するかは、上のbに対し、Floerコホモロジーがどう依存するか、という問題に換言される。それが前節での話しであった。

§4 その他

(1) 本稿では主にミラー対称性予想の観点から説明したが、具体的なシンプレクティック幾何への応用もいくつか得られる。もともと、Floerコホモロジーはアーノルド予想を解くために考え出された。アーノルド予想は色々な変種があるが、周期的ハミルトン系の場合、ハミルトン同相の不動点の個数（周期的ハミルトン系の解の個数）をシンプレクティック多様体のベッチ数の総和で下から評価するものであるが [23]、それは、大きくいって２つのステップを経て考察される：(i) 不動点を生成元にする複体を

[23] これは深谷－小野等により解決された。

考えそのコホモロジー（Floerコホモロジー）を構成する[24]。(ii) できたFloerコホモロジーともとのシンプレクティック多様体のコホモロジーとの比較定理を証明する。不動点の問題は直積のなかの対角集合とグラフとの交点と読み替えることにより、シンプレクティック多様体(M,ω) の中の2つのラグランジアンLと$\phi(L)$ （ϕはMのハミルトン微分同相写像）あるいはより一般にL_1, L_2 の交点の個数評価に関する予想に一般化相対化される。しかし、これは一般には正しくない。しかし、我々の意味でラグランジンが非障害的(即ち$\widehat{\mathcal{M}C}_L \neq \emptyset$) であれば、所望の評価式が得られる。他にもいくつかの評価式が得れるが詳細は省略する。(上記 (ii) に当るステップでスペクトル系列を構成する。この際係数環を普遍ノビコフ環$\Lambda_{0,nov}$としてその上でスペクトル系列の一般論（例えば、スペクトル系列の収束問題）を展開することは、あまりにも巨大な環ゆえ、あぶない。が、幾何学的に表れる我々のFloerコホモロジーについては、ある種の有限性が成り立っており、これを駆使してスペクトル系列が構成される。ここでも鍵は結局グロモフのコンパクト性定理である。)

他に$\mathbf{C}^n$の中に埋め込まれたコンパクトラグランジアン部分多様体のマスロフ指数は非自明であろうという予想についても、応用がある。

(2) ラグランジンが相対スピンである、という条件は、物理のある対称性からの要請として対応する条件が、堀健太郎氏とその共同研究者（名前を忘れてしまいました。すみません。）により、独立に発見されている。

(3) $M = \mathbf{C}P^1$の場合、大円Lと$\phi(L)$を考えるとこれは非障害的であるが、大円Lと小円L'を考えると障害がでることがわかる。一方、堀一Vafaによれば、Fano多様体をターゲット空間とするモデルのミラーはランダウーギンズバーグ模型になり、ランダウーギンズバーグ模型に行けば、Floerコホモロジーが容易に計算できる。上の現象を堀氏は、ミラーを用いてランダウーギンズバーグ模型で説明し、結果は我々のものとぴったり一致している。

References.

[FOOO] K. Fukaya, Y-G Oh, H. Ohta and K. Ono, Lagrangian intersection Floer theory – Anomaly and Obstruction –. Preprint. (2000).

[FO] K. Fukaya and K. Ono, Arnold conjecture and Gromov-Witten invariants, Topology **38** (1999) 933 - 1048.

[G] M. Gromov, Pseudoholomorphic curves in symplectic geometry. Invent. Math. **82** (1985) 307–347.

[O] H. Ohta, Obstruction to and deformation of Lagrangian intersection Floer cohomology. Proceedings of "Mirror Symmetry and Symplectic Geometry" ed. by K. Fukaya et all. World Scientific. (2001) 281–309.

[24](i)が完了した時点で、直ちに不動点の個数はFloerコホモロジーの階数の総和により下から評価される。